

壹、緒論

運用算則 (algorithms properties) 執行數字運算，是學習操弄代數符號的基礎 (Carpenter, Franke, & Levi, 2003)。Carpenter 等 (2003) 的研究發現，算則的學習與代數之間的轉化有密切關係，在計算或操弄符號表現優異的學生，較能透過一般化及利用概念和步驟之間關係的辨識進行解題，且能因計算程序的簡化，而有事半功倍的效益。此外，研究也發現，將教學焦點放在乘法分配律 (distribution law) 和結合律 (associative law) 策略的理解，對促進學生代數推理，扮演著極重要的角色，因為：

一、乘法算則可協助學生一般化及驗證策略所強調的數學概念，並反過來發展代數的推理 (陳竹村, 1997; 甯自強, 1995, 1997; Carraher, Schliemann, Brizuela, & Earnest, 2006)。教師若能提供等分解一個或兩個因子成為較小的數字，或證明為何可以這樣處理問題的機會，在此過程中可讓學生瞭解代數推理的重要性及算則的意義。

二、在乘法問題解題的過程中，學生若能將分配律與結合律加以一般化及驗證，那麼在代數的學習上會有較佳的理解。例如，能夠驗證 $16 \times 8 = 10 \times 8 + 6 \times 8$ ，將能運用相似的推理解決代數問題，像是 $16y = 10y + 6y$ ；能解決 $23 \times 35 = (20 + 3) \times (30 + 5) = (20 \times 30) + (20 \times 5) + (3 \times 30) + (3 \times 5)$ ，將可運用分配律的知識解決像 $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$ 的代數問題。

針對算則對學生數學概念學習的必要性，教育部 (2003) 在《國民教育九年一貫課程綱要：數學學習領域》四年級之「代數」能力指標裡，強調學生要能在具體的情境，理解乘法的結合律。對五年級學生則明示要能理解乘法對加法的分配律，並應用於簡化心算。因此，數學作業的練習題裡，常出現有關結合律或分配律的問題，如長方形周長之算則，及加、乘法之應用。乘法算則指的是將某物件所包含複雜的內涵關係，予以抽離成多層次的系統，來描述被乘數、乘數與積之間的關係，並操弄物件內涵關係裡單位量轉換的活動 (陳竹村, 1997)。四年級學生在課堂已經接觸乘法概念，但能否理解並運用算則進行解題，探索他們對算則概念理解的狀況，可作為檢驗算則教學成效的依據。

學生若理解乘法算則，那麼應能解釋與證明執行計算時所運用的代數推理 (Baek, 2008)。但根據教學現場的觀察，教師並未提供一個學習代數的基礎，常將算則當成是一系列的運算，很少提供學生進行數學關係思考的機會，因此，當學生接觸代數問題時，常無法判斷及運用數學關係解決等式和簡單的算則問題。

Baek (1998, 2008) 指出乘法分配律與結合律概念的理解，最基本的能力是能對問題中有關聯的數字加以分解與合成，明白等號兩邊數字運算代表等值的關係，當分解、合成與等值概念經過合理的驗證後，才可建立堅固的結合律與分配律概念。然而，學生面對問題時，如

何探索解題的要素，進行數字的分解和合成？如何從題意中數字的關係轉化成結合律或分配律的算則？他們是否理解算式等號兩邊等值運算的概念呢？教師要協助學生有效的理解乘法算則，那麼就需對乘法分配律與結合律概念的學習，深入明瞭不可。鑑此，本研究希冀透過調查的方式，探索學生對分配律與結合律概念理解的情形，包含算則的辨識判斷、正確算式的選擇與解釋，呈現對問題的思考，形成算式表徵，利用分配律與結合律進行解題，以提供改善代數推理課程設計和教學實施的依據。本研究目的為：

- 一、探索學生對乘法算則概念辨識判斷的情形，作為引導學生數學概念理解學習的基礎。
- 二、分析學生對問題情境提供之多元算式進行正確選擇的情形，瞭解其解題運用的策略。
- 三、從學生對問題情境提供之多元算式選擇排列的表現與解釋，歸納出解決乘法問題的思考路徑。
- 四、針對問題情境，探究學生如何思考問題關係，形成算式表徵，利用乘法算則解題。

貳、文獻探討

一、乘法分配律與結合律概念理解之引導

Carpenter 等（2003）將數字基本的算則與運算的範例，視為是小學算術與代數之間整合的重點，認為能將算則運用於解題上，且在解題的歷程討論如何運用，才可建立紮實的代數學學習能力。當學生能夠思考和抽離算則，那麼算則概念才能精細（sophisticated），才能減少操弄具體材料的依賴，而使計算流暢自如。理解乘法問題是明白數學的重心，美國數學教師學會（National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 1989）的《學校數學課程與評量標準》（*Curriculum and evaluation standards for school mathematics*）建議：學生需能透過算則的演算和創造，發現問題變數之間的關係，建構出乘法概念的意義。因此，要促進發展流利的算則策略，首先，要協助學生感覺乘法的概念，讓其能發展自己的策略；其次，要能明確地理解算則，運用這些算則進行一般化，且能更代數的思考。要讓學生感覺算則，教師需以真實生活的情境介紹乘法，鼓勵學生討論問題情境、解題策略、對策略的推理，解釋算式與原問題情境的關係。根據 Carpenter 等人的研究，認為教師要明白學生算則理解的情形，可運用下列策略：在教學時可採用更代數化的方式呈現算則的概念，提供學生可提升等分解一個或兩個因子的問題材料，對學生算則概念的理解可呈現是非題或採用開放式命題的方式進行評鑑。

Baek（2008）認為上述策略不僅可促進聰慧的學生進行關係的思考，並能協助習慣運算的學生，透過等式兩邊物件運算產出的結果，驗證算則中數字的等值關係，明確理解分配律與結合律的概念，便於一般化這些算則，使計算更加流暢。雖然算則對學生數學概念的發展與正確執行計算有重大的影響（陳竹村，1997；Baek, 1998, 2008; Carpenter et al., 2003），但有關學生乘法算則的理解，甚少針對學生如何將問題情境中的數字分解與合成後的關係做連