

壹、緒論

圓面積的計算是平面幾何課程的重點（教育部，2008），而複合圖形面積的學習對國小學生來說是一項考驗！學生除要理解構成圓形圖形要素間的關係、熟悉圖形面積公式、運用「切割」、「填補」等策略，使複合圖形變成能使用公式計算，並以合宜的運算策略簡化算式以利正確解答產出。倘若學生對圓形複合圖形面積解題的先備知識不足、概念錯誤、欠缺運算能力或討厭計算，則容易失敗受到挫折，影響日後數學學習的意願及對數學議題的理解和探討。

學生幾何能力的發展，隨著年級有不同的重點，但彼此互為影響，依據「九年一貫課程綱要」能力指標說明（教育部，2008；陳嘉皇，2004，2013），學生在低年級階段強調幾何形體的認識、探索和操作，建立「面積」的概念。中年級階段，學生學習運用幾何形體的構成要素（如：角、邊、面）及其數量性質（角度、邊長、面積）敘述幾何形體，透過操作，將簡單圖形切割、重組成另一個已知的簡單圖形，推理並利用幾何圖形之面積公式（正方形、長方形）。高年級則認識生活中的平面圖形（三角形、四邊形、多邊形、圓形、扇形），理解幾何圖形的基本定義並熟練定義的相關操作，應用全等、相似性質於幾何圖形問題的解題上。

由上述圓形概念相關能力指標的說明得知，學生若要成功解圓形複合圖形面積問題，需同時考量圓形圖形構成的要素及其特質，推理和運用面積公式，轉換「等積異形」概念，整合複合圖形成符合解題基模之圖式，才能順利解題（侯雪卿，2004；陳嘉皇，2004；Nguyen, 2010）。然觀察教學現場，面對圖形面積問題時，學生常被要求直接採用公式計算，忽略如何提取和應用相關數學知識，鼓勵觀察和引導聰慧策略化約問題進行運算。這些缺失易造成學生解題時流於計算，忽略處理圖形問題時的思維，難建立穩固的數學概念（Confrey et al., 2012）。對於圓形概念發展和教學的研究，焦點大多集中在教學方法的探究（王建興，2003）及學生迷思概念的產出（沈佩芳，2002；侯雪卿，2004），鮮少針對圓形教學單元做一完整規劃和課程設計之探討。多數國小教師教學時，依照教科書的課程架構、伴隨課表分配時間實行，然對這些設計的材料能否滿足學生需求甚少探究；另一方面，由於學生學習進程不同，按照既定課程設計實施教學，或多或少會產生學習困難，所以教師在教學歷程應不斷省思，視學生學習情形調整目標、教學內容，應用合適的步驟和策略，促進學生數學理解。

Simon (1995) 在其「假設性學習軌道」(Hypothetical Learning Trajectories, HLTs) 概念中，認為教師可根據學習目標、學習任務及大腦思考等預期路徑構築一個 HLTs，教師實施的教學過程，可提供發現學生實際的表現和 HLTs 之間的符合程度。HLTs 特別強調三個元素：一、明確和可辨識的目標。先前的學習理論主要在於：(一) 應用相同的理論和步驟至所有的領域，忽略不同學科的性質；(二) 要求課程透過既有的標準而接受目標。HLTs 的目標同時以數學家的專業和學生對數學學習的思考兩者作為基礎，因此，數學領域和學生學習及思考的研究，

對決定數學的目標扮演基礎的角色。二、HLT 的發展是以思考層次的進展作為基礎，當概念和技巧進行網絡的內在連結時，可反映出知識的認知科學觀點 (Clements & Sarama, 2004)。對物件的行動是學生操作、明白和學習的主要方法，藉由先前的理論和實徵性研究，利用臨床晤談的方式檢驗學生數學知識，包括概念、策略、直觀和用來解題的形成性評量方式。三、HLT 的教學任務 (tasks) 不僅包含可學習的內、外在表徵模式，還可調整產生在物件上的行動，建構學生所需的思考層次。HLT 包含學生獨特的思考結構，是種連續、詳細且同時對目標、任務、教學、學生的思考和學習加以整合的一種模式 (Clements & Battista, 2000)。根據這些瞭解，教師可將修正過的 HLT 作為後續課程進行的基礎，亦可從學生的表現考量課程設計及教學順序的安排，改善學習環境，以利學生學習。

綜合上述研究動機說明，本研究旨在利用 HLT 設計圓形複合圖形面積任務，進行教學實驗，檢視學生學習情形及解題表現，瞭解學生在圓形複合圖形面積解題教學環節產生的迷思概念及困難，透過教師教學省思，檢討及思索如何進行有效教學，以幫助學生建立統整的圓形概念，順利解圓形複合圖形面積問題。本研究目的如下：

- 一、利用 HLT 設計適合學生學習的圓形複合圖形面積之任務。
- 二、瞭解六年級學生在 HLT 設計之圓形複合圖形面積的數學解題表現。
- 三、探討教師實施圓形複合圖形面積教學後，產生的教學省思為何。

貳、文獻探討

一、HLT 之定義和內涵

HLT 係指教師在相關的數學領域，透過任務設計，產出學生學習心智運作的步驟或執行行動的推測路徑，說明學生如何進行思考和進展，創造成就的動力，協助導向較高層次的數學目標。Simon (1995) 認為 HLT 應用於任務設計和學習時包含下列內涵：

(一) 目標的設定

學習目標的設定可透過對學生非正式概念的發展、建構主義的理論、正式數學教育等層面的研究，深入描述學生學習所需達成的標準。目標是否達成可採取一些相關假設、教育實驗，針對教學進展進行評估，以發現材料和教學間的關聯 (Clements & Sarama, 2004; Gravemeijer, 1999; Simon, 1995)。

(二) 學習任務

課程理論和實務相互發展並應用是 HLT 的精髓。HLT 強調教學進行時任務的評估，例如課室的教學實驗，進而修正順序，以引導產出合適的任務。